על המוסיקה הפיתגורית והלוח העברי

נדב שנרב

שנים רבות ניסו אנשים להפיק מוסיקה נעימה לאוזן, בדרך כלל על ידי שימוש במערכת מיתרים כלשהי (נבל, כינור, פסנתר וצ'לו הם דוגמאות מודרניות של כלי מיתר). לא תמיד נעמה הנעימה המופקת לאוזן השומעים, ולשם כך התקינו הללו יתדות כוונון בקצות המיתרים (דוגמת אותם "ברגים" הנמצאים גם היום בקצה הגיטרה או הכינור). המנגן היה מאלתר תוך כדי ניגון, מסובב אנה ואנה, עד שהיה מקבל צליל נעים.

את המפנה בעולם המוסיקה חולל פיתגורס, האיש שהאמין כי יחסים בין מספרים שלמים הם המפתח להבנת העולם. יום אחד הבין פיתגורס כי, בהנתן שני מיתרים זהים בעלי אותה מתיחות, יהיה הצליל היוצא משניהם נעים לאוזן אם ארכו של האחד כפול מארכו של האחר. בלשון מודרנית נאמר כי הכפלת אורך המיתר משנה את הצליל באוקטבה שלמה. אם ניקח מיתר הנותן את הצליל "דו", ייתן המיתר שארכו כפול את "דו" נמוך באוקטבה אחת. משום מה האוזן שלנו (או המח שלנו) נוטה לזהות את ה"דו" משני המינים, למרות שמבחינה פיסיקלית יש כאן פשוט הכפלה של התדר. כאשר מאן דהוא שומע מקהלת גברים ונשים שרה "ביחד", הרי שהגברים שרים את התו בבס או בטנור, ואילו הנשים שרות אותו בסופרן או באלט. כל אלו הם פשוט שמות לכפולות שלמות של התדר הנמוך (במקרה שלנו – הבס).

עד כאן הכל טוב ויפה, אבל אי אפשר לבנות כלי נגינה (או לכתוב מוסיקה) שבה יש רק תו אחד המנוגן באוקטבות שונות. פיתגורס טרח ומצא כי גם היחס 3:2 בין ארכי המיתרים יוצר משהו נעים לאוזן. במונחי היום, "נעים לאוזן" הוא קוסוננס (להבדיל מדיסוננס, הלא נעים) והיחס 3:2 נקרא קוינטה או חמשה בלע"ז.

טוב, עדיין לא הגענו אל המנוחה ואל הנחלה. אם מיתר שארכו 1 ייתן לנו את הדו הגבוה, מיתר באורך 2 את הדו הנמוך, ומיתר באורך 1.5 את הקוינטה (בערך מה שאנו קוראים היום סול), הצלילים יהיו נעימים, אבל אנו מעוניינים בסולם בן שבעה טונים! כדי לפתור את הבעיה הזו, החליט פיתגורס לבנות את כלי הנגינה במכפלות של 3/2 בין כל טון לטון.

וכך היה מונה:

1, כאמור, הוא הדו הגבוה.

3/2 הוא הסול.

התו הבא יינתן על ידי 3/2 בריבוע, כלומר 9/4, אך את זה לוקחים חזרה לתחום שבין אחד לשתים על ידי הכפלת המכנה, כלומר 9/8. זהו הרה.

9/4 כפול 3/2 הם 27/8. הכפלת המונה תתן 27/16 וזהו לה.

התו הבא, מי, יהיה 81/16, וכאן צריך לכפול את המכנה בארבע. מי = 81/64.

אל התו הבא נגיע דרך השבר 243/32, שאותו נמפה לקטע שבין אחד לשתים כ 243/128. אנו קוראים לתו זה סי (אז קראו לו טי)

התו האחרון, פה, הוא 4/3.

מה קרה כאן? בעיקרון יש בין כל טון לטון שמתחתיו (שימו לב שאנו עוברים מן הדו הגבוה לנמוך) כפל ב 9/8. כך הרה הוא 9/8 כפול אחד, והמי הוא 9/8 כפול הרה = 81/64. בין המי לפה, לעומת זאת, יש רק סמי טון– זהו כפל ב 256/243. מהפה לסול יש טון (4/3 כפול 9/8 הם 3/2), מהסול ללה שוב טון, מהלה לסי טון, ומהסי לדו הנמוך (שארכו 2) יש שוב סמי טון ($243/128 * 256/243 = 2$). הפלא ופלא.

יש כאן קירוב, הנקרא "קומה פיתגוראית", ונובע מכך שסמי טון אינו חצי טון. סמי טון כפול יהיה 256/243 בריבוע, כלומר $2^{16}/3^{10}$, וזה לא שוה ל 9/8 (מזה נובע גם ערכו של הפה שאינו קשור לכפל חוזר ב 3/2) הקירוב הפיתגוראי אומר כי $2^{16}/3^{10} = 3^2/2^3$, כלומר $3^{12}=2^{19}$. זה כמובן רק "בערך": למען האמת $3^{12}/2^{19}=1.01364$, אלא שמספר זה הוא מספיק קרוב לאחד עבור הפיתגוראים, ולכן זה הקירוב שהם לקחו.

ובכן, בעית המוסיקה היא בנית המרווח בין אחד לשתים מחזקות של 3/2, וראינו את הפתרון הפיתגורי שלה.

מהי בעית הלוח? בעית הלוח הקלאסית נובעת מכך ששנת חמה מכילה מספר לא שלם של ימים. הטריק צריך להיות בנית לוח המורכב משנים במספר אורכים במחזוריות מסוימת, כך שהממוצע של אורך השנה על פני כל המחזור נותן את אורך השנה האמיתי.

איך עושים זאת? עם עם ושיטותיו. הרדיקלים ביותר הם המוסלמים, שקבעו לעצמם שנה בת 12 חדשי לבנה, ושתלך השמש לעזאזל. כתוצאה מכך שנת המוסלמים הממוצעת קצרה בכ-11 יום משנת החמה, כך שמועדיהם וחגיהם "נוזלים" אחורה על פני לוח השנה. הרמאדאן שהיה בשנים האחרונות באב עבר השנה לתמוז, כי המוסלמים לא הוסיפו לשנה הקודמת חודש עיבור, אותו חודש שנועד להשוות את שנת החמה לשנת הלוח אצל היהודים.

הנוצרים, לעומת זאת, עבדו בתחילה עם הלוח היוליאני, המניח כי ארכה של שנת חמה הוא 365.25 יום בדיוק. אם כך אפשר לבנות שנה בת 365 יום, ולהוסיף כל 4 שנים יום נוסף (29 בפברואר) וכך להגיע לדיוק מושלם. הנחה זו על אורך שנת החמה (הידועה במקורות ישראל כ"תקופת שמואל")

אינה נכונה, כמובן, ולכן תיקן גרגוריוס ה 13 את הלוח ובכך הפך אותו למדויק יותר (וגם ל"לוח גרגוריאני").

ומה אצלנו? הלוח היהודי סובל מבעיה כפולה. לא די בכך שצריך לשמור על נאמנות לשנת החמה, ה"יחידות" בהן מותר לשחק אינן ימים אלא חדשי לבנה. על כל שנה עברית להיות מורכבת ממספר שלם של חדשי לבנה, על כן הקירוב העברי ללוח (הבנוי על מה שנקרא "תקופת רב אדא") מבוסס על מחזור של 19 שנה, ששבע מתוכן (גו"ח אדז"ט, כלומר השנים 3,6,8,11,14,17,19 בכל מחזור) מכילות 13 חדשי לבנה ו (כל היתר)12 מהן מכילות רק 12 חדשי לבנה. סך הכל יש 235 חדשי לבנה ב 19 שנה, כלומר הקירוב העברי מניח 12.3684 חדשי לבנה כשנת חמה אחת.

שתים עשרה, שבע, תשע עשרה. שמים לב לדמיון במספרים? נסמן ב d את ההפרש (בחודשים) בין שנה מעוברת לשנת חמה אמיתית (d=0.6317). אם מישהו שם לב ש d קרוב מאד ל log(2)/log(3) (=0.6309) אזי הדרישה 19*d=12 (תנאי לאמיתות הלוח העברי) שקולה להוצאת לוגריתם מן הקירוב הפיתגורי $3^{12}=2^{19}$. לא שמישהו אז ידע על לוגריתמים, אבל אולי אפשר לגלות את זה איכשהו אחרת. אם כופלים את d ב 19 מקבלים 12.0027, ומישהו כנראה שם לב שזה קרוב מאד למספר שלם.

שימו לב גם לעוד עובדה: יש שבע שנים מעוברות במחזור ושבעה טונים בסולם הפיתגורי. הרווחים הקצרים בין השנים המעוברות הם בין ו' לח' (בין השנה המעוברת השניה לשלישית במחזור) ובין השנה הששית (יז) לאחרונה (יט), בהקבלה למיקום הסמי-טונים על הסולם הפיתגורי בין הטון השני לשלישי (מי-פה) והטון הששי לשביעי (סי-דו נמוך).

טוב, אני מודה שזה נשמע קצת כמו תורת קונספירציה של בארי חמיש, אבל בכל זאת נדמה לי שיש כאן דמיון חשוד. האם זה נובע משיטת קירוב זהה של continues fractions ? רעיונות ??