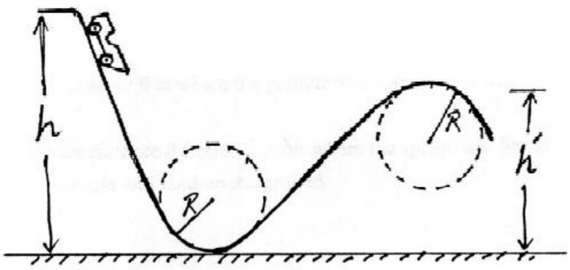
מכניקה לתלמידי הנדסה 83 102

מועד א' תשע"ד.

מרצה: נדב שנרב.

משך המבחן 3.5 שעות
חומר עזר: מחשבון בלבד.
עליך לענות על 3 שאלות מתוך הארבע שלפניך.
אין לצרף חלקי שאלות. נא לכתוב באופן ברור ולסמן את חלקי הטיוטה.
השאלון מנוסח בלשון זכר מטעמי נוחות בלבד.

1. עגלה יורדת במורד מסילה המתוארת בציור. העגלה מוגבלת לתנועה על המסילה בלבד, היא מתחילה את מסעה בגובה h ובמהירות אפס, וכח הגרביטציה שפועל עליה הוא mg. כמתואר בציור, למסילה יש "עמק" בצורה של מעגל שרדיוסו R וגם "הר" (ששיא גובהו 'h) באותה צורה.



א. מה המהירות שבה תגיע העגלה לנקודה הנמוכה ביותר (תחתית העמק)?

$$v = \sqrt{2gh}$$

ב. אם באותה נקודה נמוכה ביותר **סכום כל הכחות הפועלים על העגלה** הוא 8mg, מהו R? בטא אותו בעזרת גדלים אחרים המופיעים בשאלה.

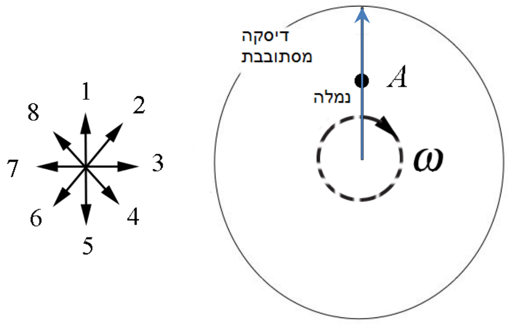
$$N - mg = 8mg$$
$$N - mg = \frac{mv^2}{R} = \frac{2mgh}{R}$$
$$R = h/4$$

ג. אם בנקודה הגבוהה ביותר בראש ההר ('h) הכח הנורמלי הפועל על העגלה הוא אפס, מהו הגובה 'h?

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{2mg(h-h`)}{R} = mg$$
$$R = h/4$$
$$h` = h - R/2 = 7h/8$$

על דיסקה (ברדיוס R) המסתובבת **עם כיוון השעון** במהירות זויתית קבועה ω מהלכת נמלה שמסתה m. ביחס לדיסקה הנמלה נעה במהירות קבועה v_0 בכיוון מהמרכז להיקף.

ד. כאשר הנמלה נמצאת בדיוק בחצי הדרך, בנקודה A שמרחקה ממרכז הדסקה R/2, איזה חץ (מבין החצים הממוספרים 1-8) מתאר בצורה הקרובה ביותר למציאות את כיוון המהירות של הנמלה ביחס לקרקע? (שימו לב שוב כי הסיבוב הוא עם כיוון השעון). [<u>אין צורך</u> לנמק את תשובתך]



במערכת הקרקע (אם r בכיוון 1, θ בכיוון 3)

$$r = v_0 t \quad \theta = \omega t$$
$$v = v_0 \hat{r} + v_0 \omega t \hat{\theta}$$
$$\Rightarrow 2$$

ה. מה **גודלו** של כח החיכוך שמפעילה הדיסקה על הנמלה בנקודה A?

$$r = v_0 t \quad \theta = \omega t$$
$$\vec{a} = -v_0 t \omega^2 \hat{r} + 2 v_0 \omega \hat{\theta}$$
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ו. מבין החצים 1-8, מי מתאר יותר במדויק את **כיוונו** של כח החיכוך מסעיף ה'?
4

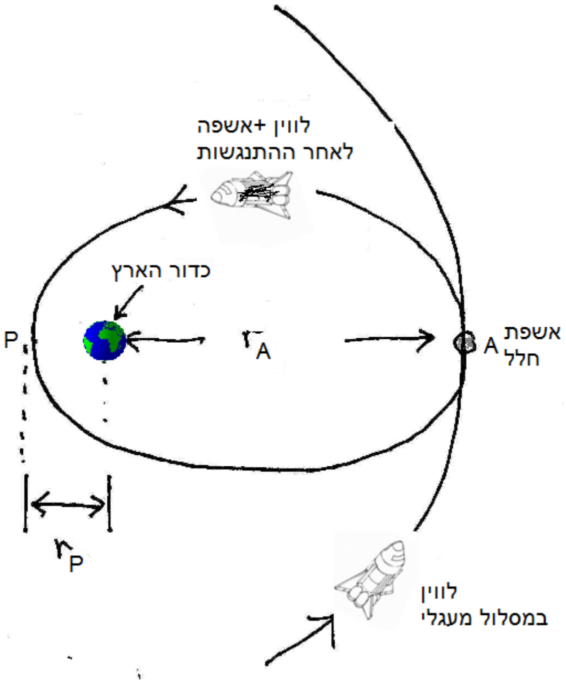
ז. איך תשתנה תשובתך אם דיסקה תנוע, באותה מהירות זויתית אבל **נגד** כיוון השעון, וכל יתר הנתונים יישארו זהים?

כעת θ בכיוון 7 לכן התשובה 6

ח. איך תשתנה תשובתך אם הדיסקה נעה עם כיוון השעון אבל כיוון התנועה של הנמלה הוא הפוך, מן ההיקף למרכז?

הנגזרת של r הופכת סימן וכך גם הכח בכיוון θ ולכן שוב התשובה 6

2. לווין שמהירותו v_s ומסתו m_s נע סביב כדור הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו r_A. בנקודה המסומנת A בציור פוגע הלווין בחתיכת פסולת חלל שמסתה m_d היא **מחצית** ממסת הלווין ומהירותה v_d היא **מחצית** ממהירות הלווין ממהירות הלווין. נתון כי בנקודת הפגיעה מהירות הלווין ומהירותה של חתיכת הפסולת הן באותו כיוון. לאחר הפגיעה הלווין והפסולת נדבקים זה לזה וממשיכים כגוף אחד.



א. מצא את מהירות הלווין לפני הפגיעה במונחי G, r_A ומסת כדור הארץ M .

$$\frac{m_s v_s^2}{r_A} = \frac{G m_s M}{r_A{}^2}$$

$$v_s^2 = \frac{GM}{r_A}$$

ב. מצא את מהירות הלווין מיד לאחר הפגיעה במונחי G, r_A ומסת כדור הארץ M.

$$m_s v_s + \frac{1}{4} m_s v_s = (m_s + \frac{1}{2} m_s) v_T$$

$$v_T = \frac{5 v_s}{6} = \sqrt{\frac{25GM}{36 r_A}}$$

שימור תנע קוי

ג. נניח כי לאחר הפגיעה הגוף החדש שנוצר (לווין + אשפה) נע במסלול אליפטי בו הנקודה הרחוקה ביותר מכדור הארץ היא נקודת ההתנגשות (כפי שנראה בציור). מצא את האנרגיה הכוללת והתנע הזויתי הכולל של הגוף החדש בנקודה A. בטא תשובתך במונחי במונחי G, m_s, r_A ומסת כדור הארץ M .

$$E = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m_s v_T^2 - \frac{3GMm_s}{2r_A} = -\frac{47}{48}\frac{GMm_s}{r_A}$$

$$L = \frac{3}{2} m_s r_A v_T = \frac{5m_s}{4}\sqrt{GMr_A}$$

ד. אם הנקודה הקרובה ביותר לכדור הארץ, במסלול האליפטי החדש, היא הנקודה P שמרחקה ממרכז כדור הארץ הוא r_p (ראה ציור), מהו הגודל r_p/r_A? התשובה היא מספר טהור ללא שום קבועים.

בנקודה הקרובה ביותר (m היא מסת הגוף החדש כלומר $1.5m_s$)

$$E=\frac{1}{2}m\,v_p^2-\frac{GMm}{r_p}$$

$$L=m\,r_p v_p$$

נשווה תנעים זויתיים $v_p=v_T r_A/r_p$ ואח"כ אנרגיות

$$\frac{1}{2}m\,v_T^2\left(\frac{r_A}{r_P}\right)^2-\frac{GMm}{r_p}=\frac{1}{2}mv_T^2-\frac{GMm}{r_A}$$

$$\frac{1}{2}v_T^2\left(\left(\frac{r_A}{r_P}\right)^2-1\right)=\frac{1}{2}\frac{25GM}{36r_A}\left(\left[\left(\frac{r_A}{r_P}\right)-1\right]\left[\left(\frac{r_A}{r_P}\right)+1\right]\right)=GM\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{25}{36}\left(\left[\left(\frac{r_A}{r_P}\right)-1\right]\left[\left(\frac{r_A}{r_P}\right)+1\right]\right)=\left(\frac{r_A}{r_P}-1\right)$$

$$\left[\left(\frac{r_A}{r_P}\right)+1\right]=\frac{72}{25}\Rightarrow\frac{r_A}{r_P}=\frac{47}{25}$$

ה. תן ביטוי עבור הפוטנציאל האפקטיבי לאחר ההתנגשות, והוכח ממנו כי נקודת ההתנגשות היא אכן הנקודה הרחוקה ביותר מכדור הארץ במסלולו האליפטי של הלווין לאחר ההתנגשות.

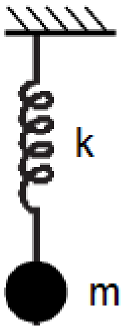
התשובה בנויה על ההוכחה שהאנרגיה הכוללת והפוטנציאל האפקטיבי שווים ב A

$$U_{eff}=\frac{L^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=mGM\left(\frac{25r_A^{\;2}}{72r}-\frac{1}{r}\right)$$

$$@\,r=r_A$$

$$U=mGM\left(\frac{25r_A}{72}-\frac{1}{r_A}\right)=E$$

3. המסה m=1 תלויה מן התקרה על קפיץ שקבוע הקפיץ שלו k=9 N/m. אורך הקפיץ כשהוא רפוי הוא L = 1m. הניסוי כולו נערך על כוכב נוגה, שם קבוע הגרביטציה הוא **g=9**. התנועה בשאלה זו היא אך ורק בכיוון אנכי.



א. אם (ללא פעולת כוחות אחרים פרט לקפיץ ולכבידה) מהירות המסה היא אפס וגם תאוצתה אפס, מה מרחקה מן התקרה?

Mg=ky לכן y=1m והמרחק מהתקרה יהיה 2m

ב. אם משחררים את המסה ממנוחה כאשר הקפיץ רפוי (כלומר כאשר היא נמצאת מטר אחד מתחת לתקרה), באיזה מרחק מן התקרה היא תגיע שוב למהירות אפס?

3m. שחררנו מטר מעל נקודת שיווי המשקל, לכן המסה תרד מטר מתחתיה.

ג. בתנאי סעיף ב', תן ביטוי עבור מרחק המסה מן התקרה בכל זמן בעתיד.

$$\omega = \sqrt{k/m} = 3$$
$$y = 2 + A\cos(3t + \phi)$$
$$y(0) = 1 \; \dot{y}(0) = 0$$
$$y = 2 - \cos(3t)$$

ד. אם המסה במנוחה בנקודת שיווי המשקל שלה, ואז מתחיל לפעול עליה כח $F_y = 2\sin(3.1t)$. מה המעתק של המסה מנקודת שיווי המשקל שלה כפונקציה של הזמן? האם המסה תפגע בסופו של דבר בתקרה?

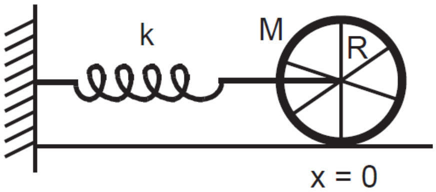
הנה הפתרון, האמפליטודה המקסימלית גדולה משני מטר לכן המסה תפגע בתקרה

$$\ddot{y} + 9y = 2\sin(3.1t)$$
$$y = \frac{2[\sin(\omega t) - \sin(3t)/9]}{(9 - 3.1^2)}$$
$$\max = \frac{2}{0.61} > 2$$

ה. אם פועל על המסה כח $F_y = 2\sin(\omega t)$ וגם כח חיכוך $F_y = -bv_y$. מה צריך להיות גדלו של b על מנת שהמסה לא תפגע בתקרה בשום פנים, גם אם ירשו לנו לקבוע את ערך התדירות של הכח המאלץ, ω, כרצוננו? ניתן להתחשב רק בתנודות היציבות.

$$A = \frac{2}{1*\sqrt{\left(\left(9-\omega^2\right)^2 + b^2\omega^2\right)}} \le 2$$

$$b \ge 1/3$$



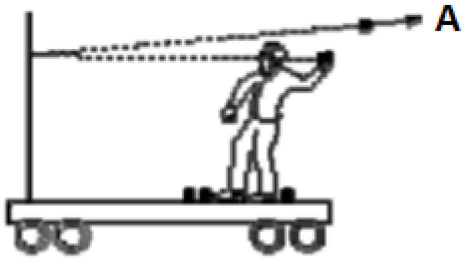
ו. חישוק שרדיוסו R, מסתו M ומומנט האינרציה שלו MR^2, מחובר במרכז המסה שלו לקפיץ המעוגן בקיר כפי שנראה בציור. החישוק נע ב**גלגול ללא החלקה** על המשטח שתחתיו. מה היחס בין כיוון הפעולה של כח החיכוך לכיוון הכח שמפעיל הקפיץ? מהו זמן המחזור של התנודות אותן מבצע החישוק אם מזיזים אותו מנקודת שיווי המשקל שלו?

$$M\ddot{x}_{c.m.} = -kx_{c.m.} - f$$

$$I\alpha = fR = (MR^2)\frac{\ddot{x}}{R} \Rightarrow f = M\ddot{x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

4. א. אדם נמצא על משטח בעל גלגלים וזורק כדור שמאלה, הכדור פוגע בקיר המחובר למשטח וחוזר ימינה (ראה ציור). בהנחה שמקדם החיכוך בין המשטח לאדם אינסופי, כאשר הכדור הגיע לנקודה A, האם מהירות המשטח היא בכיוון ימינה, שמאלה או שהיא אפס? נמק (אין צורך בתשובה כמותית).

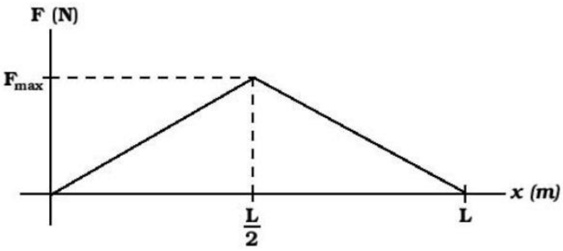


בכיוון שמאלה, כי לכדור יש תנע ימינה.

ב. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א' אם הקיר אינו מחובר למשטח ויכול להחליק עליו עם מקדם חיכוך אפס (שוב, מספיק נימוק ואין צורך בתשובה כמותית).

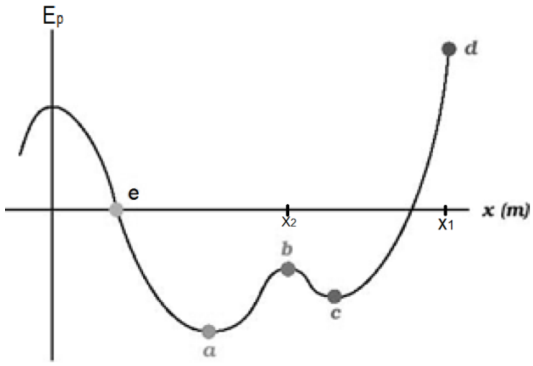
כעת המשטח ינוע ימינה, כי הכדור קיבל מהאדם תנע שמאלה והפגיעה בקיר לא משנה דבר.

ג. חלקיק יצא מאפס ונע עד x=L כאשר הכח שפועל עליו בכל נקודה נראה בציור. מה תהיה האנרגיה הקינטית שלו ב x=L/2 וב x=L? בטא תשובתך במונחי F_{max} ו L בלבד.



האנרגיה הקינטית היא אינטגרל על כח לפי דרך לכן היא תהיה F_{max}*L/4 ב L/2 ו F_{max}L/2 ב L.

ד. חלקיק נע על ציר x כאשר האנרגיה הפוטנציאלית שלו נתונה בדיאגרמה שמשמאל. אין חיכוך משום סוג. אם משחררים את החלקיק במנוחה מן הנקודה X_1 שעל ציר x, האם הוא יצליח להגיע לנקודה המסומנת e? ומה אם משחררים את החלקיק בנקודה X_2? נמק.

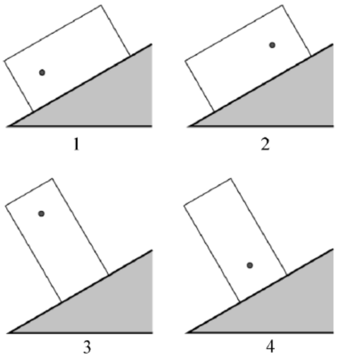


במקרה הראשון כן כי יש לו מספיק אנרגיה, במקרה השני לא.

ה. אם ידוע שהחלקיק עבר מן הראשית עד X_1, באיזו נקודה היתה מהירותו הגבוהה ביותר? נמק.

בנקודה a שבה האנרגיה הפוטנציאלית היא הכי נמוכה.

ו. לפניך ארבע קופסאות שמסת כל אחת מהן M, כולן מונחות על מישור משופע שזוית הבסיס שלו θ. הנקודה השחורה מציינת את מיקום מרכז המסה של כל אחת מן הקוביות. מקדם החיכוך בין המשטח לקוביה הוא אינסופי.



עליך להחליט מי מן הקוביות 1-4, כאשר תשוחרר ממנוחה, תנוע בכל זאת וכיצד. לאחר שהחלטת, הראה free body diagram **אך ורק** עבור הקופסה בה בחרת, הנח שהנקודה השחורה היא בגובה y מעל תחתית הקופסה ובמרחק x מהקיר השמאלי שלה, והראה בעזרת חשבון מפורט מדוע הקופסה תנוע ובאיזו צורה. [שים לב כי כאשר מורידים מנקודה כלשהי בקופסה אנך לכיוון הרצפה, הוא חותך את המישור המשופע בזוית של 90-θ, שהטנגנס שלה הוא 1/tgθ]

ברור שקופסה 3 היא זו שתתהפך סביב הנקודה השמאלית התחתונה שלה. אם נחשב torque סביב נקודה זו נגלה (חיכוך לא תורם כי הוא פועל על הקו המחבר את הציר לכח)

$$\tau = mgx\cos\theta - mgy\sin\theta - Nz$$

כאשר z הרחק בין נקודת העיגון של הכח הנורמלי לנקודה השמאלית התחתונה. המינימום שנוכל להשיג הוא אם ניקח את z לאפס, לכן התנאי להתהפכות הקופסה הוא

$$x\cos\theta < y\sin\theta$$

$$\frac{x}{y} < tg\theta \Rightarrow \frac{y}{x} > 1/tg\theta$$

ואם כך ברור שאם האנך שיורד מנקודת מרכז המסה לרצפה חותך את המישור המשופע מחוץ לבסיס התיבה, הקופסה תתהפך.